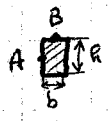
STATI DI TENSIONE

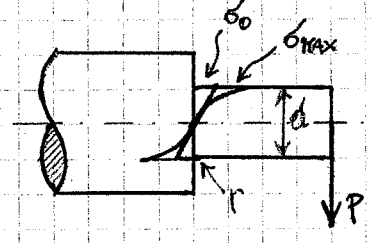
Caratteristica	Tensione	Deformazione	Resistenza	Rigidezza
FORZA NORMALE	$\sigma = \frac{P}{A}$	$\varepsilon_{zz} = \underbrace{\frac{P}{EA}}_{=\varepsilon}$	A	EA
FLESSIONE (x)	$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$	$\varepsilon_{zz} = \underbrace{\frac{M_x}{EJ_x}}_{=K_x} y$	$\frac{J_x}{y_{MAX}}$	EJ_x
TORSIONE 	$\tau = \frac{M_z}{J_o} r$	$\gamma_{\theta z} = \underbrace{\frac{M_z}{GJ_o}}_{=\gamma} r$	$\frac{J_o}{R}$	GJ_o
// 	$\tau_A = \frac{M_z}{\alpha h b^2}$ $\tau_B = \frac{M_z}{\beta h b^2}$	$\gamma_{\theta z} = \frac{\tau}{G}$	$\alpha h b^2$	$G J_{o,eq}$
// 	$\tau = \frac{M_z}{2Amt}$	$\gamma_{ez} = \frac{\tau}{G}$	$2Amt$	$GJ_{o,eq}$
TAGLIO	$\tau_m = \mu \frac{T_y}{A}$	$\left(\gamma_{yz} = \frac{\tau}{G}\right)$	A/μ	$\frac{GA}{\chi}$

Dove μ è caratteristico della sezione

 $\mu = \frac{3}{2}$;  $\mu = \frac{4}{3}$;  $\mu = 2$;  $\mu = \frac{A}{A_{anima}}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

CONCENTRAZIONE DELLE TENSIONI



La tensione massima in corrispondenza dello spallamento è maggiore di quella di Navier

$$\sigma_{MAX} = K_t \sigma_o$$

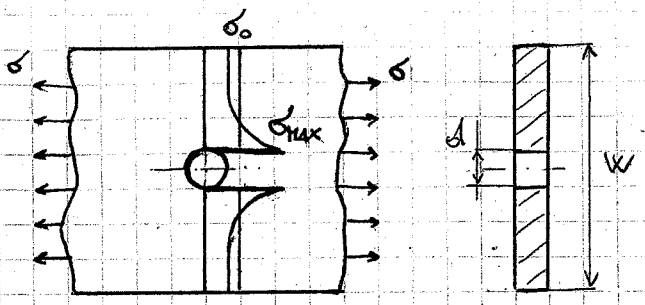
Dove K_t è il FATTORE TEORICO DI CONCENTRAZIONE DELLE TENSIONI, i cui valori sono forniti in grafici in funzione del tipo di INTAGLIO e di rapporti adimensionali (es r/d), a testimonianza che quello che conta è la forma del componente, non la dimensione.

Esiste anche un fattore analogo K_{ts}, per le tensioni di taglio.

K_t ha andamento lineare se il materiale ha comportamento lineare (quindi finchè non si ha snervamento) e non dipende dal materiale del componente ma solo dalla geometria dell'intaglio.

σ_o è la tensione nominale che ottengo dalle formule precedenti con i carichi applicati, tenendo conto della sezione di LEGAMENTO, cioè quella con l'intaglio.

es: lastra in trazione



σ_0 deve essere riferita alla sezione in cui c'è il foro, che è quella minima

σ_0 è un valore convenzionale in realtà il materiale non la sente.

Si può definire un altro fattore

$$K_t' = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}$$

MASTER COPY

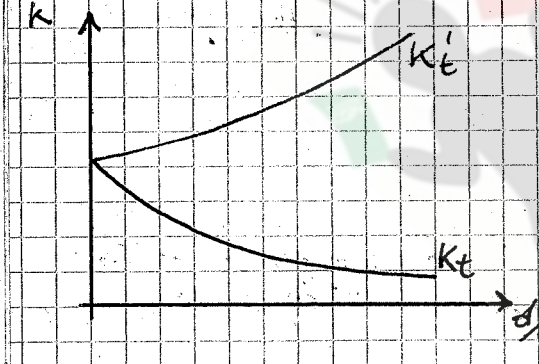
Tel. 388/9837745

Questo è riferito alla sezione della lastra senza l'intaglio, ed è la tensione che sollecita il materiale abbastanza distante dal foro.

Considero un caso con $d/W = 0,8$ (es. $d = 8$ mm, $W = 10$ mm)

La sezione di legamento è molto piccola; dai grafici si vede $K_t \cong 2$, mentre K_t', che ha più senso fisico ma è meno frequente, si calcola

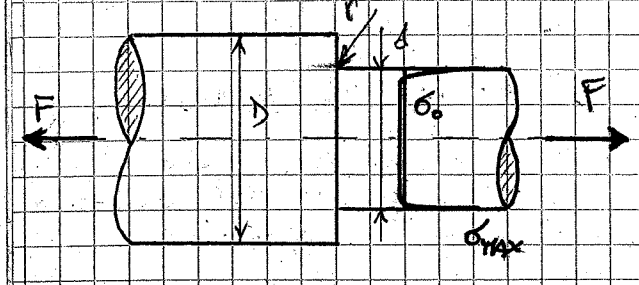
$$K_t' = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma} = K_t \cdot 2\frac{F}{(W-d)} \cdot \frac{W}{F} = 2\frac{W}{W-d} = 10 \text{ !!}$$

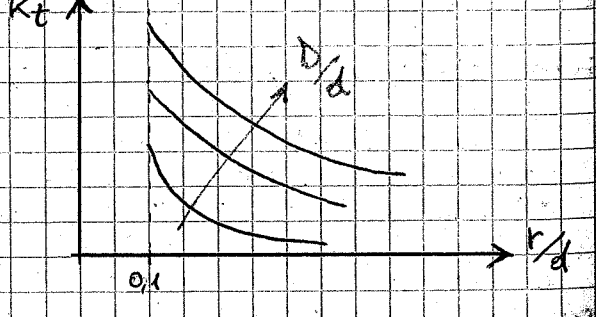


A guardare il grafico di K_t, sembrerebbe che un foro più grande porterebbe ad uno stato di tensione più favorevoli.

Questo è ovviamente falso, perché K_t diminuisce, ma è preponderante l'aumento di σ_0, dovuto alla riduzione della sezione di legamento.

Considero ora un caso limite, di un albero con spallamento con raggio di raccordo molto piccolo.





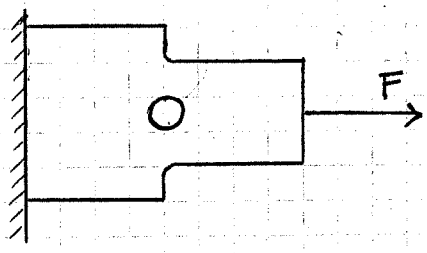
A guardare il grafico sembra che, per valori di r che tendono a zero

le tensioni salirebbero a valori sempre più grandi, teoricamente ∞.

Ovviamente questo non è così, perchè tutto dipende dalla risposta del materiale, che, almeno localmente, plasticizza.
Ipotizzando un comportamento elastico - perfettamente plastico, si vede che la tensione, raggiunto lo snervamento S_y, non aumenta più.

Quando due intagli sono ravvicinati fra loro, anche due intagli uguali fra loro, la concentrazione della tensione si ha solo in corrispondenza del primo, o comunque il K_t del primo è maggiore del K_t del secondo.
Si dice allora che il secondo intaglio è IN OMBRA.

es: intagli sovrapposti



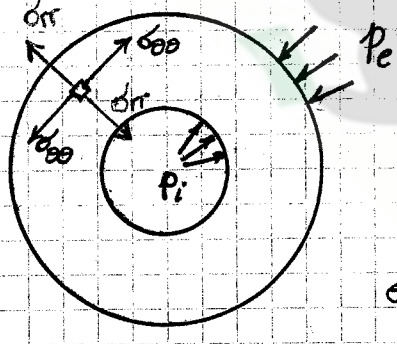
Se ho una geometria con intagli localizzati sulla stessa sezione, devo approssimare perchè non ho i grafici per queste situazioni

Ipotizzo allora che i due intagli non si "diano noia" a vicenda e faccio due calcoli distinti, uno con foro e senza raccordo, uno con raccordo senza foro

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

CILINDRI IN PRESSIONE



Quando si parla di cilindri in pressione, le pressioni si considerano positive se di compressione, negative se di trazione.

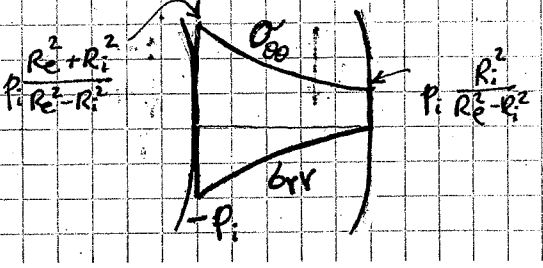
Data la assialsimmetria del problema, è sufficiente considerare due tensioni, la $\sigma_{\theta\theta}$ (circonferenziale) e la σ_{rr} (radiale)

$$\sigma_{rr}(r) = p_i \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \frac{R_e^2}{r^2}\right) - p_e \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \frac{R_i^2}{r^2}\right)$$

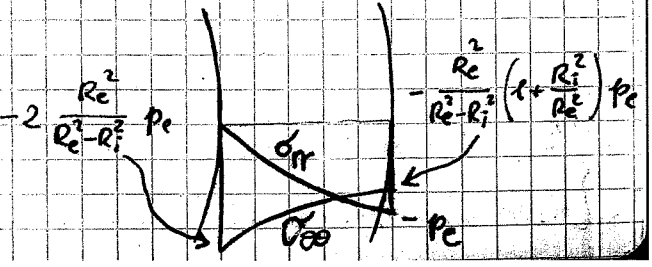
$$\sigma_{\theta\theta}(r) = p_i \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \frac{R_e^2}{r}\right) - p_e \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \frac{R_i^2}{r}\right)$$

Considero ora due casi particolari, ovvero $p_e = 0$ e $p_i = 0$

- $p_e = 0$



- $p_i = 0$



Come è ovvio, la σ_{rr} in corrispondenza delle superfici libere è uguale alla pressione agente su di esse.

Si vede poi che la tensione massima, in senso tangenziale, si ha sempre in corrispondenza della superficie interna.

Se poi non sono presenti forze assiali e se la lunghezza del cilindro è sensibilmente minore del diametro (se ho cioè una lastra), sarò in condizioni di PLANE STRESS ($\sigma_{zz} = 0$), perché non c'è niente che impedisce al materiale di deformarsi in direzione z.

Un altro caso notevole è il PLANE STRAIN ($\varepsilon_{zz} = 0$), che si verifica quando tutto il materiale circostante a quello in esame ne impedisce la deformazione, ovvero in presenza di tubi molto lunghi e molto spessi, dove si ha plane strain nel materiale vicino al foro.

Nei tubi sottili in pressione, facendo l'equilibrio di mezzo tubo, si ottiene il seguente risultato approssimato

$$\sigma_{rr} = 0 \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{R}{t} p \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{R}{2t} p$$

MECCANICA DEL CONTATTO

Esistono due tipologie di contatto:

- Contatto CONFORME
- Contatto NON CONFORME

Il caso più frequente ed interessante è il secondo, che comprende tutti i casi in cui il contatto avviene su un'area teoricamente nulla.

Per trattare questi problemi si ricorre al MODELLO DI HERTZ, che ha però bisogno delle seguenti ipotesi:

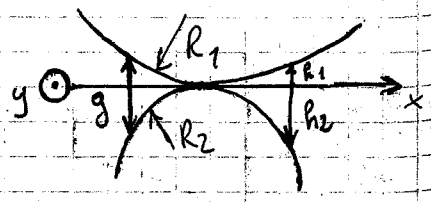
1) I corpi non devono essere troppo deformabili, ovvero i raggi di curvatura dei due pezzi devono essere sensibilmente maggiori della larghezza dell'area di contatto deformata

2) A geometria indeformata, i due corpi devono avere curvatura uguale nella zona di contatto.

3) I bordi del corpo non devono essere troppo vicini alla zona di contatto.

Si definisce una funzione gap $g(x,y)$, che per ogni punto del piano di tangenza, fornisce la distanza fra i due corpi

$$\begin{cases} h_1(x,y) = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy \\ h_2(x,y) = A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2 xy \end{cases}$$



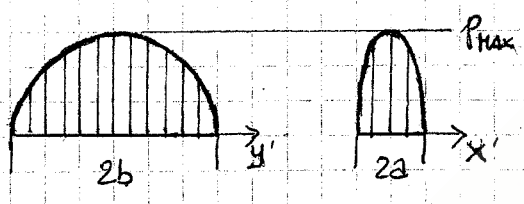
$$g(x,y) = h_1(x,y) + h_2(x,y) = (A_1+A_2)\,x^2 + (B_1+B_2)\,y^2 + (C_1+C_2)\,xy$$

Si vede che $g(x,y)$ è una forma quadratica, per cui deve ammettere una coppia di direzioni principali di curvatura

$$g(x',y') = A'x'^2 + B'y'^2 = \frac{1}{2R_x'}x'^2 + \frac{1}{2R_y'}y'^2$$

A' e B' si trovano imponendole uguali alle derivate seconde della $g(x,y)$ secondo x' e y'

L'area di contatto è in generale un'ellisse, che ha per direzioni principali gli assi x' e y'. L'andamento delle pressioni è



$$p(x',y') = p_{MAX}\sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Si vedono ora due casi notevoli: contatto SFERA-SFERA e contatto CILINDRO-CILINDRO (assi paralleli)

- SFERA-SFERA: le linee di livello sono circolari, la p è

$$p(x',y') = p_{MAX}\sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{a}\right)^2}$$

Introduco ora i seguenti parametri

$$E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1} \overset{\text{se i metalli sono simili:}}{=} \frac{E}{2(1-\nu^2)} \quad ; \quad R^* = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

Se F è la forza che si scambiano i due corpi, dal modello di Hertz

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F}{4E^*}R^*} \quad ; \quad p_{MAX} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2}$$

- CILINDRO-CILINDRO ($/\!/$): le linee di livello sono rettilinee, la p è

$$p(x') = p_{MAX}\sqrt{1-\left(\frac{x'}{b}\right)}$$

Introducendo anche qui E^* ed R^*, si ottiene

$$b = \sqrt{\frac{4FR^*}{\pi L E^*}} \quad ; \quad p_{MAX} = 2\frac{F}{\pi b L}$$